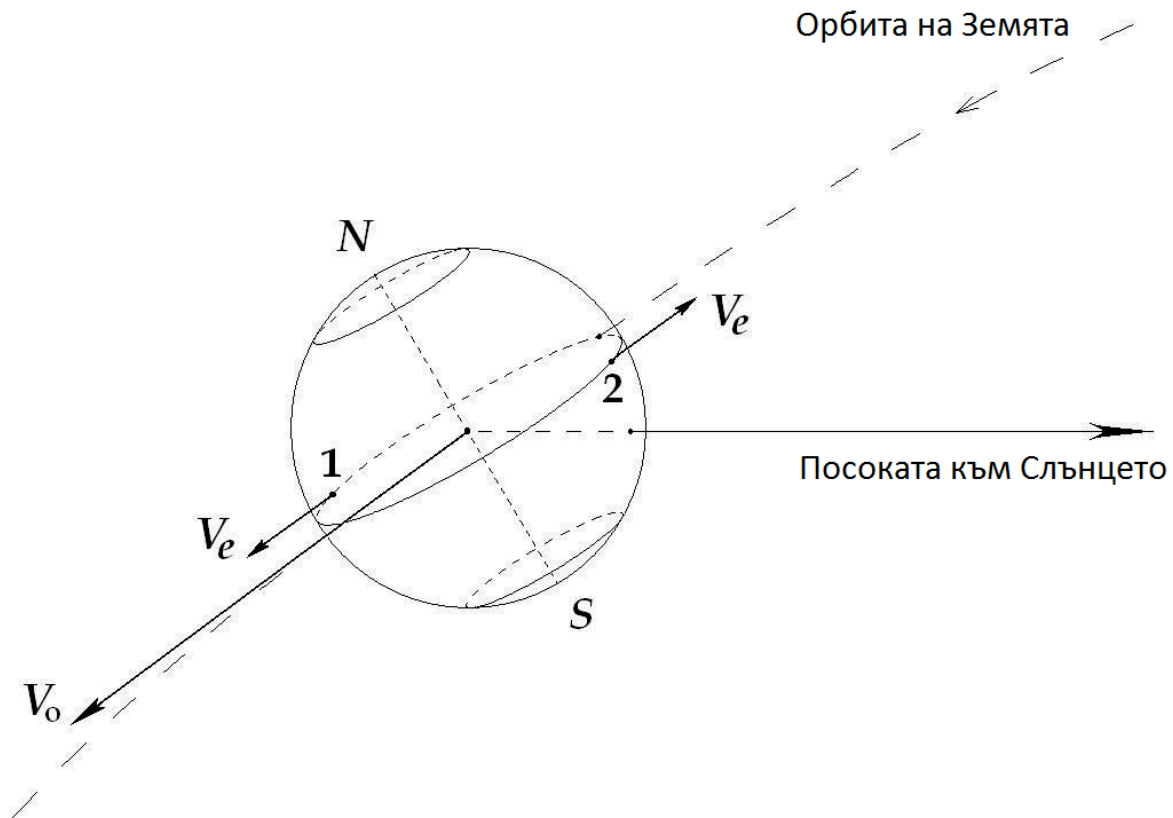


II кръг, 20 февруари 2015 г.
Ученици от 11-12 клас

1 задача. Най-голямата скорост. Земята се върти около оста си и едновременно с това обикаля около Слънцето по елиптична орбита. Всяка точка от земната повърхност, освен полюсите, участва в двете движения. Но различните точки се движат с различни скорости.

- А. Кога през денонощието и годината, и къде по земната повърхност трябва да застанем, за да се движим с най-голяма скорост относно Слънцето?
- Б. При какви условия Луната ще има максимална скорост относно Слънцето?

Решение: Земята се върти около оста си в същата посока, в която обикаля около Слънцето. Затова пространствената скорост на точки от нощната страна на Земята е приблизително по посока на пространствената скорост на Земята при движението ѝ по нейната орбита. Оста на Земята е наклонена и запазва ориентацията си при обикалянето около Слънцето (ако не отчитаме прецесията, разбира се, която е много бавна). Затова движението на точки от земната повърхност ще бъде точно успоредно на орбиталното движение само в два момента през годината – когато Земята е в точката на лятно слънцестоене и когато е в точката на зимно слънцестоене. Тогава оста на Земята е наклонена в посока перпендикулярна на орбитата (по-точно е перпендикулярна на допирателната към орбитата). Движението на точките от повърхността, за които е полунощ или пладне, става в направление успоредно на допирателната към земната орбита, и следователно успоредно на вектора на пространствената скорост на Земята. (Фиг.1)



Фиг.1

Точка 1, която се намира на екватора на Земята и за която е полунощ, ще се движи най-бързо от всички точки на земната повърхност, защото нейната линейна скорост относно Земята е максимална и съвпада по направление и посока с вектора на скоростта на орбиталното движение на Земята. Точка 2 има същата линейна скорост на въртене около оста на Земята, но тя е насочена в противоположна посока на скоростта на Земята, при движението ѝ по нейната орбита.

Съществува още едно явление, което следва да отчетем. При своето движение около Слънцето Земята се движи не по кръгова, а по елиптична орбита, макар и с малък ексцентрицитет. Най-бързо Земята се движи в перихелия на своята орбита. Земята преминава през перихелия в първите няколко дни на януари – *най-често в интервала 2-4 януари*. Това е 11-13 дни след зимното слънцестоене. Следователно в интервала от 22 декември до 4 януари, т.е. някъде около Нова година, може да очакваме точки от повърхността на Земята да се движат най-бързо относно Слънцето. За да се движим ние най-бързо, трябва в този интервал от време да се намираме на екватора и, когато сумата от двете скорости наистина е максимална, да сме от обратната, относно Слънцето, страна на Земята, на полунощната линия в точка 1 – т.е. за нас трябва да е полунощ по местно време.

Движението на Луната около Земята става по елиптична орбита, която е наклонена относно равнината на еклиптиката. Апсидната линия (линията, която преминава през апогея, перигея и центъра на орбитата и съвпада с т.н. голяма ос на орбитата), както и линията на възлите се въртят в посока обратна на движението на Луната по орбитата. Най-голяма скорост Луната ще има в перигея на своята орбита. За да е максимална скоростта относно Слънцето е необходимо скоростта в перигея на орбитата да е успоредна на орбиталното движение на Земята. Следователно трябва апсидната линия да е перпендикулярна на орбитата на Земята и перигеят да е от външната страна на земната орбита. Но орбитата има и наклон относно равнината на еклиптиката. За да бъде скоростта в перигея точно успоредна на скоростта на Земята, трябва линията на възлите на лунната орбита да е перпендикулярна на апсидната линия.

Следователно условията за максимална скорост на Луната относно Слънцето са следните: Земята е в перихелий, апсидната линия на лунната орбита е перпендикулярна на орбитата на Земята, линията на възлите на лунната орбита е перпендикулярна на апсидната линия, перигеят на лунната орбита е от външната страна на земната орбита и Луната е в перигей.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За посочване на екватора като най-благоприятно местоположение и обяснение – 2 т.

За определяне на времето от денонощието и обяснение – 2 т.

За определяне на слънцестоянието като най-подходящ момент и обосновка – 2 т.

За съобразяване с най-голямата орбитална скорост на Земята в перихелий – 2 т.

За решение на подусловието за движението на Луната – 4 т.

2 задача. Носталгия по Земята. В нашата Галактика, около една недалечна звезда е открита планета подобна на Земята. Нейната обиколка по екватора е 48000 километра, а едно завъртане около оста си, относно своето слънце, планетата прави за 48 часа. Земяните харесали новата планета и започнали да я заселват. Единственото, което не им харесвало, било това, че денонощието продължава 48 часа. Затова те си построили самолет, който лети със скорост 500 километра в час. Седнали в него и решили да обиколят планетата по екватора, надявайки се да съкратят дългото денонощие.

- А. В коя посока трябва да лети самолетът?
- Б. Каква ще бъде продължителността на денонощието за пътуващите в самолета?

Резултатът от това пътуване обаче, не допаднал на земните хора и те тръгнали да летят по паралел с такава планетографска ширина φ , че денонощието за тях да бъде точно 24 часа.

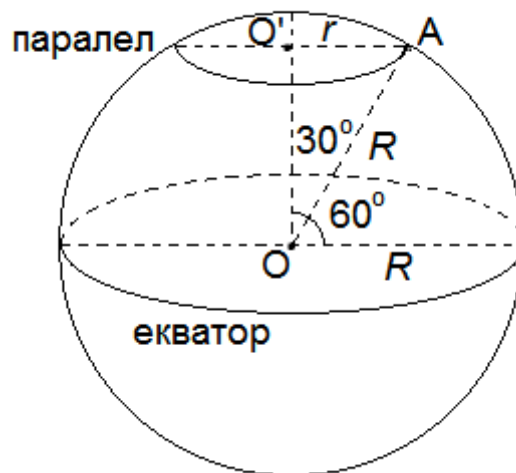
- В. Определете планетографската ширина на паралела, който са избрали заселниците.

Решение:

Членовете на земната колония трябва да се движат на изток. Така скоростта на движението им относно оста на планетата ще бъде сбор от скоростта на въртене на точките от повърхността и скоростта на самолета. Смяната на деня и нощта за тях ще става по-бързо – все едно те ще правят едно завъртане около оста на планетата за по-кратък период от периода на денонощното ѝ въртене. Щом планетата прави едно завъртане около себе си за 48 часа и нейната обиколката по екватора е 48 000 км, то скоростта на точка от повърхността на планетата ще бъде $48\,000 / 48 = 1000$ км/ч. Скоростта на самолета относно оста на планетата ще бъде $1000 + 500 = 1500$ км/ч. Това означава, че за пътуващите в самолета денят и нощта ще се сменят 1.5 пъти по-бързо, отколкото ако стоят на повърхността. Денонощието за тях ще продължава $48 \text{ ч.} / 1.5 = 32 \text{ ч.}$ Това очевидно е повече от 24 часа и по тази причина те не са напълно довольни.

Нека обърнем внимание на факта, че земното денонощие от 24 часа е точно 2 пъти по-кратко, отколкото денонощието на планетата. Ако земните жители искат да имат на самолета денонощие с продължителност 24 часа, те трябва да отидат на паралел, по който да могат да обикалят със самолета за двойно по-кратко време в сравнение с времето на завъртане на планетата. Скоростта на движение на самолета относно оста на планетата трябва да е два пъти по-голяма от скоростта на точките от повърхността по този паралел. Следователно скоростта на въртене на точките от повърхността трябва да е равна на 500 км/ч. и събрана със скоростта на самолета от 500 км/ч. ще даде двойно по-голяма скорост относно оста на планетата. За да е изпълнено това, необходимо е дължината на паралела да е 24 000 км – двойно по-малка от обиколката на планетата по екватора. Тогава скоростта на самолета относно оста на планетата ще бъде равна на $500 + 500 = 1000$ км/ч. и смяната на деня и нощта за пътниците в него ще бъде 24 часа. Щом обиколката на този паралел е двойно по-малка от обиколката на екватора, то и неговият радиус r ще бъде двойно по-малък от радиуса на планетата R .

Както се вижда от чертежа, в правоъгълния триъгълник $OO'A$ катетът $O'A$ е двойно по-малък от хипотенузата OA . Това означава, че ъгълът, лежащ срещу този катет, е равен на 30° . Следователно точките от паралела отстоят на 30° от полюса на планетата и тяхната планетографска ширина трябва да бъде $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

**Критерии за оценяване (общо 12 т.):**

За определяне на посоката на летене на самолета и обяснение – 2 т.

За правилен метод на пресмятане на денонощието, когато земляните летят по екватора на планетата – 4 т.

За верен числен отговор – 1 т.

За правилен начин на определяне на паралела, по който да лети самолетът – 4 т.

За верен отговор за планетографската ширина – 1 т.

3 задача. Луна над хоризонта. Планета, населена с разумни същества, обикаля по кръгова орбита около своята звезда и оста ѝ на въртене е перпендикулярна на орбиталната равнина. Планетата има естествен, също гъсто населен спътник, чиято кръгова орбита лежи в равнината на планетната орбита около звездата. Спътникът е 6 пъти по-малък от планетата по диаметър и радиусът на орбитата му се равнява на 10 планетни радиуса.

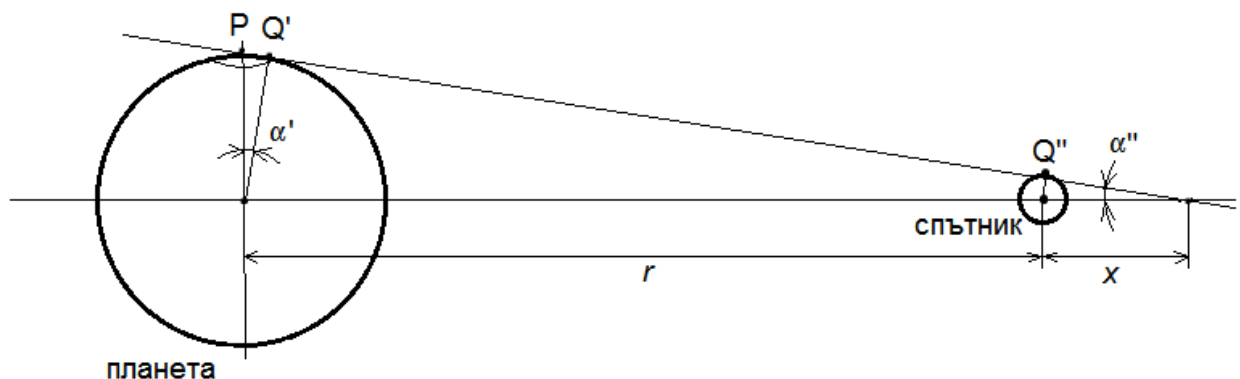
• А. Жителите на планетата обичат да общуват чрез лазерни сигнали с роднините и приятелите си, които са се преселили на спътника. Опишете областите от планетата, където такава пряка връзка никога не е възможна.

• Б. Какъв минимален ъгъл трябва да сключва оста на планетата с перпендикуляра към орбитата ѝ, така че по цялата повърхност да може да се осъществява връзка със спътника?

• В. При положение, че оста на планетата не е наклонена, опишете качествено как се изменя интервалът от време, през който връзката със спътника е възможна, с изменение на планетографската ширина.

Решение:

Да означим с R_P и R_S радиусите на планетата и спътника, а с r разстоянието между тях. За да определим областта върху планетата, откъдето никоя точка от спътника не се вижда, построяваме допирателната $Q'Q''$ към повърхностите на двете тела (Фиг. 2).



Фиг. 2.

В областта около полюса P на планетата, ограничена от паралела, на който лежи точката Q', никоя точка от спътника няма да се появява над хоризонта. Следователно в тази област пряка връзка с радиосигнали между планетата и спътника никога няма да е възможна. На планетата съществува и още една такава област със същите размери около другия ѝ полюс. Както се вижда от чертежа, в сила е следното съотношение:

$$R_S / R_P = x / (r + x)$$

Оттук намираме:

$$x = r R_S / (R_P - R_S)$$

За ъгъла α'' можем да напишем:

$$\sin \alpha'' = R_S / x$$

Замествайки получения по-горе израз за x , намираме:

$$\sin \alpha'' = (R_P - R_S) / r$$

Като знаем, че $R_S = R_P / 6$, а $r = 10R_P$, можем да пресметнем този ъгъл:

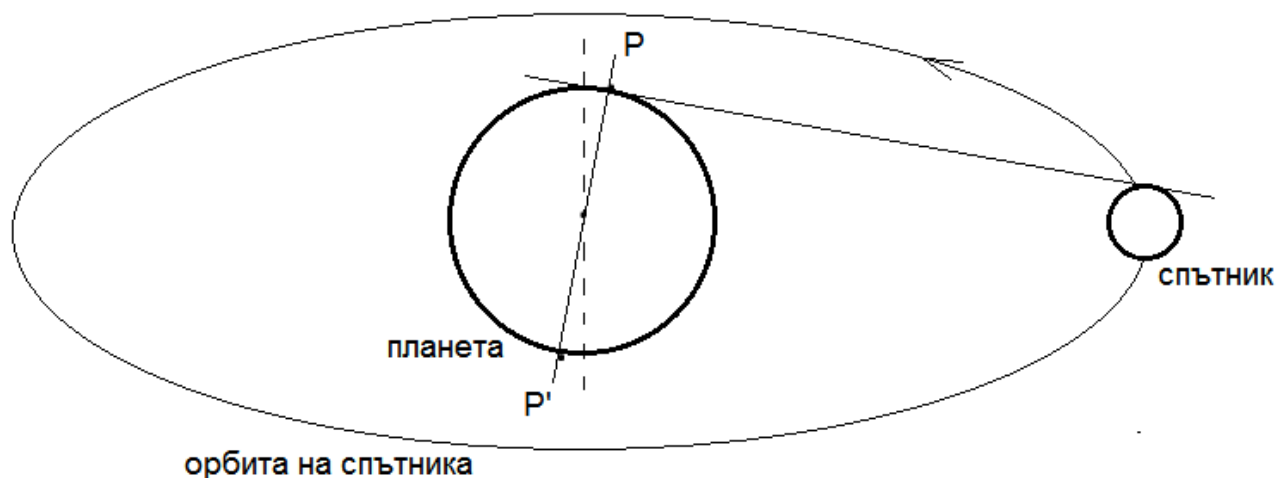
$$\sin \alpha'' = (1 - 1/6) / 10 = 1/12$$

$$\alpha'' \approx 4.8^\circ$$

Но $\alpha' = \alpha''$ като ъгли с взаимно перпендикулярни рамене, и това означава, че $\alpha' \approx 4.8^\circ$. Областта, откъдето няма да може да се поддържа връзка със спътника, е ограничена от паралел, отстоящ на 4.8° от полюса на планетата. Около другия полюс има още една такава област.

Нека приемем, че оста на планетата е наклонена на ъгъл 4.8° спрямо вертикалата към равнината на нейната орбита около звездата, а следователно и спрямо вертикалата към орбиталната равнина на спътника. Тогава поне в някои интервали от време ще има видимост

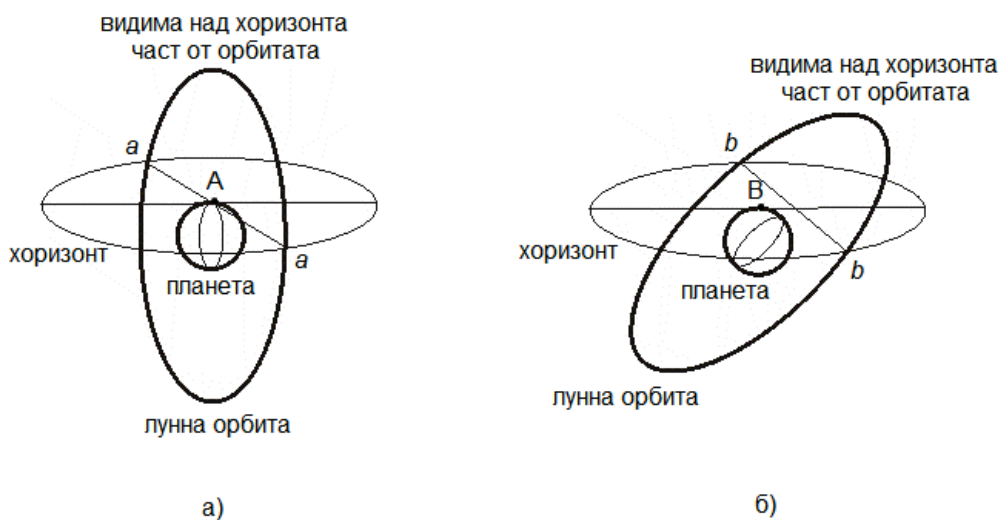
към част от спътника дори и от околополярните области. На Фиг.3 е показано положение на спътника, при което за момент има видимост към точка от неговата повърхност и от самия полюс на планетата Р. С увеличаване на наклона на оста на планетата ще се удължават и интервалите от време, през които жителите на околополярните райони и на самите полюси ще могат да поддържат връзка чрез лазерни сигнали със спътника. Следователно минималният наклон на оста, който се търси, е 4.8° .



Фиг. 3

При положение, че оста на планетата не е наклонена, интервалите от време, през които ще е възможна връзка със спътника, ще зависят от планетографската ширина на наблюдателя. Всъщност тези интервали ще се определят от времето, през което спътникът е над хоризонта за дадено място на планетата.

От Фиг. 4а се вижда, че за наблюдател в точка А на екватора на планетата над хоризонта ще се намира част от орбитата на спътника, която е по-малка от половината орбита. Това е съществено, тъй като спътникът се намира твърде близо до планетата и самите размери на планетата не могат да се пренебрегнат. От Фиг.4б става ясно, че ако наблюдателят се намира в точка В, която не лежи на екватора, то за него над хоризонта е още по-малка част от орбитата на спътника в сравнение със ситуацията на екватора. Този ефект ще се усилва с отдалечаване от екватора на планетата. Следователно в най-продължителни интервали от време връзката със спътника ще е възможна за точките от екватора, а с повишаване на планетографската ширина тези интервали ще се съкращават, докато станат равни на нула на ширина $\pm (90^\circ - 4.8^\circ) = \pm 85.2^\circ$



Фиг. 4.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За правилно описание на областите, от които не може да се осъществява връзка със спътника – 3 т.

За определяне на ъгловото отстояние на границите на областите от полюсите – 2 т.

За правилни разсъждения и заключение относно минималния наклон на оста, при който връзки ще могат да се осъществяват отвсякъде – 4 т.

За обяснение как ще се изменят интервалите от време на видимост на спътника с промяна на планетографската ширина – 3 т.

4 задача. Фази на Венера и Луната. През първите няколко месеца на 2015 година Венера ще се вижда на вечерното небе след залеза на Слънцето. При много ясно време и спокойна атмосфера вие сте успели да направите снимка на Венера, която изглежда по показания на фигурата начин. Дадена е осветената от Слънцето част на планетата. Изображението не е обърнато.

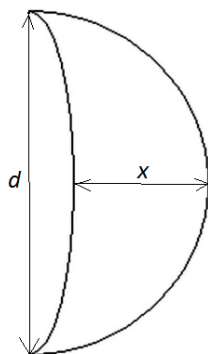
Направете необходимите построения и измервания и нарисуйте приблизително как ще изглежда фазата на Луната, ако я наблюдаваме на небето в непосредствена близост до Венера. Радиусът на орбитата на Венера е 0.7 астрономически единици.



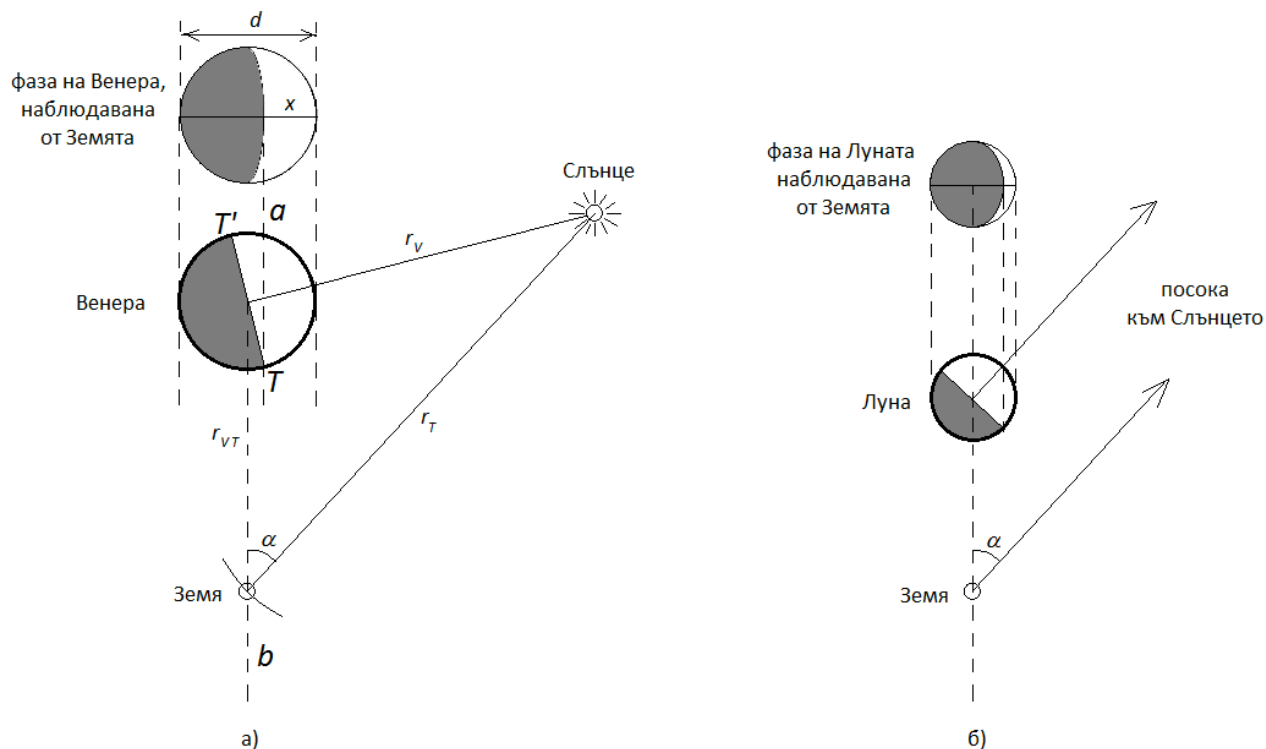
Упътване: Използвайте графични методи за построяване на дисковете на Венера и Луната, гледани от Земята и гледани „отгоре“ (откъм полюсите им), както и орбитите на Земята и Венера около Слънцето в подходящ мащаб. Направете приближение, свързано с това, че разстоянието Земя-Луна е много по-малко от разстоянията Земя-Венера-Слънце..

Решение:

Върху даденото ни изображение на Венера измерваме диаметъра на планетата d и отсечката x .



Използваме съотношението между тези два параметъра, за да пренесем изображението на Венера, наблюдавана от Земята, на Фиг. 5а. Начертаваме още една окръжност със същия размер точно под пренесеното изображение – това ще бъде самата планета Венера, гледана „отгоре“ – от позиция над орбиталната равнина на двете планети около Слънцето. Спускаме вертикалната права a до пресичането ѝ с повърхността на Венера в точка Т. Прекарваме диаметъра ТТ', който представлява терминатора на Венера. Перпендикулярно на него построяваме отсечката r_v , която съответства на разстоянието от Венера до Слънцето. Избираме подходяща дължина за тази отсечка, например 7 см. Така разстоянието r_t от Земята до Венера ще бъде равно на 10 см в същия мащаб. Чертаем вертикална права b от центъра на Венера надолу. С помощта на пергел с разтвор 10 см и острие, поставено в положението на Слънцето, чертаем малка дъга, която се пресича с правата b . Пресечната точка представлява положението на Земята относно Венера и Слънцето. Така построяваме и ъгъла α между направленията Земя-Венера и Земя-Слънце.



Фиг. 5

Тъй като Луната се вижда много близо до Венера, можем да считаме, че ъгълът между направленията Земя-Луна и Земя-Слънце е също α . Начертаваме още веднъж Земята, вертикална линия, минаваща през нея, и друга линия към Слънцето под ъгъл α към вертикалната линия (Фиг. 5б). Изобразяваме Луната с кръг над Земята. Понеже разстоянието Земя-Луна е много малко в сравнение с разстоянието Земя-Слънце, можем да смятаме, че направлението Луна-Слънце е успоредно на направлението Земя-Слънце. Прекарваме права през центъра на Луната в направление към Слънцето. Перпендикулярно на това направление построяваме един диаметър на Луната. Това е терминаторът на Луната. Над кръга, изобразяващ Луната, начертаваме как ще изглежда фазата на Луната за наблюдател на Земята. Използваме същите средства, както при Венера, но този път правим построенията в обратен ред. Виждаме, че фазата на Луната няма да е същата, както фазата на Венера. Лунният сърп ще бъде съществено по-тънък.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За правилна идея как да се построи взаимното разположение на Земята, Венера и Слънцето – 4 т.

За измервания, избор на мащаб и построяване на взаимното разположение – 3 т.

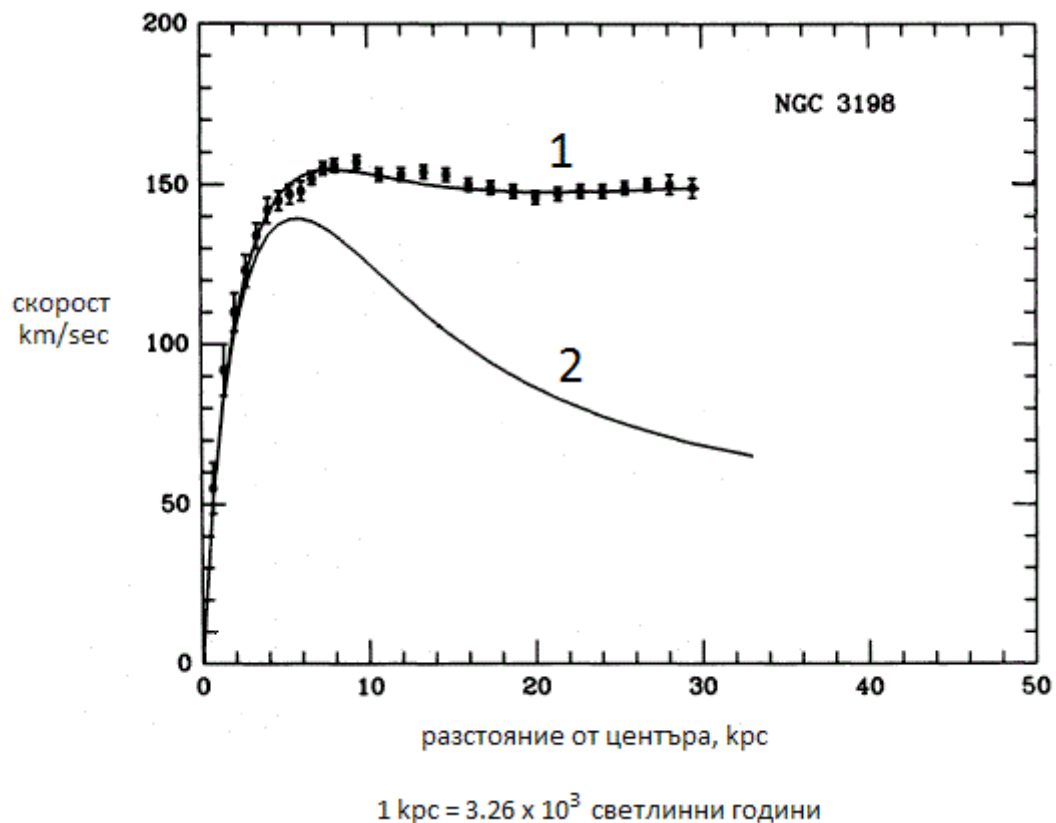
За построяване на фазата на Луната – 3 т.

За качествено сравнение между фазите на Венера и Луната като краен извод – 2 т.

5 задача. Тъмна материя. Звездите и облаците от междувъзден газ и прах в една галактика се движат около нейния център с различни скорости, които се определят от гравитационното въздействие на веществото в галактиката. Изследванията показват, че освен познатото ни засега вещество под формата на звезди и мъглявини от космически газ и прах, в галактиките присъства невидимо вещество, което астрономите наричат тъмно вещество. По спектрални наблюдения на спиралната галактика NGC 3198 са получени данни за скоростите на движение на различни обекти от нея относно нейния галактичен център. На графиката е представена кривата на изменение на тези скорости с разстоянието до центъра на галактиката (крива 1). Теоретично е пресметнато също как би изглеждала графиката, ако в галактиката имаше само обекти, които се наблюдават – звезди и облаци от газ и прах (крива 2).

• А. Определете отношението на масата на светещото вещество към масата на тъмното вещество, съдържащи се в рамките на видимите граници на галактиката.

• Б. Отговорете качествено дали отношението на масата на светещото вещество към масата на тъмното вещество намалява или нараства с разстоянието от центъра на галактиката. Обосновайте своя отговор.



Решение:

Измерваме по скалата за скоростта върху графиката и определяме мащаба – на 85 мм отговарят 200 км/сек. След това измерваме отсечките, съответстващи на скоростите v_1 и v_2 , които се отнасят за обекти в периферията на галактиката, на 30 крс от центъра. Получаваме:

$$v_1 = 200 \text{ км/сек.} \times 63 \text{ мм} / 85 \text{ мм} \approx 148 \text{ км/сек.}$$

$$v_2 = 200 \text{ км/сек.} \times 29 \text{ мм} / 85 \text{ мм} \approx 68 \text{ км/сек.}$$

Приемаме, че определените скорости са скорости на кръгово движение на звездите около галактичния център. Да означим с M_L масата на „светещото“ вещество – звезди, газ и прах – в рамките на видимите граници на галактиката, а с M_D – масата на тъмното вещество. Радиуса на видимата част от Галактиката означаваме с r . Тогава:

$$v_1 = (\gamma(M_L + M_D) / r)^{1/2}$$

$$v_2 = (\gamma M_L / r)^{1/2}$$

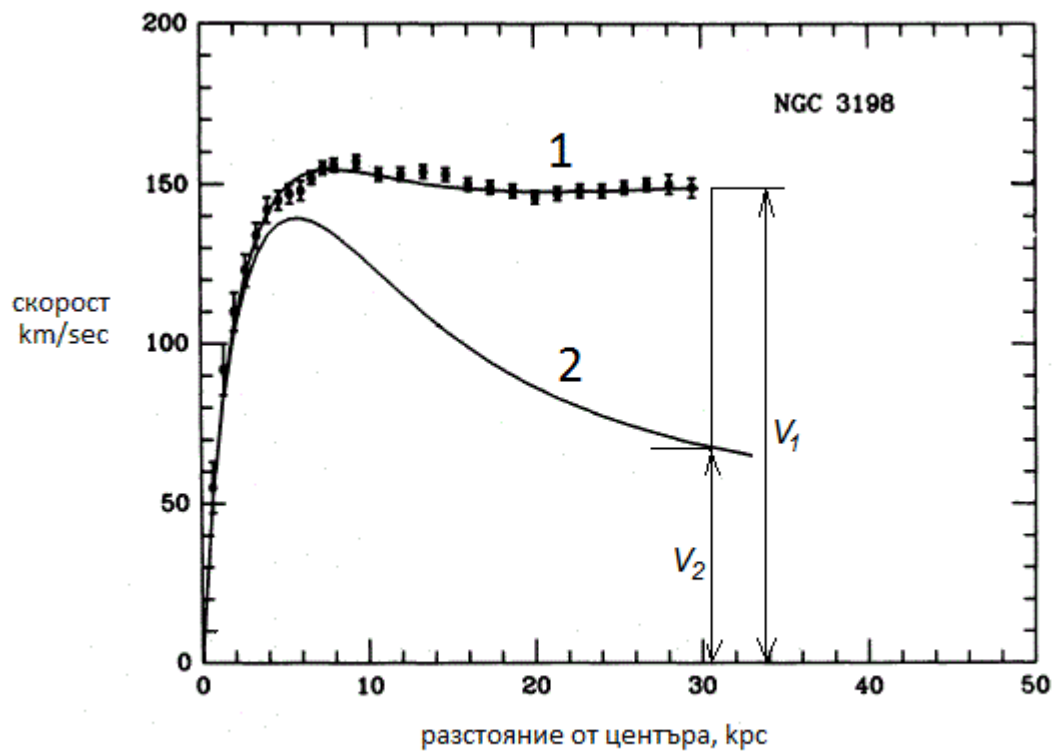
Оттук получаваме:

$$M_D / M_L = v_1^2 / v_2^2 - 1$$

$$M_D / M_L \approx 3.7 \quad \text{или} \quad M_L / M_D \approx 0.27$$

Светещото, или познатото ни вещество във вид на звезди, газ и прах, е около 3.7 пъти по-малко от тъмната материя във Вселената.

Върху графиката можем да видим, че с отдалечаване от центъра на галактиката отначало двете криви на изменение на скоростите почти съвпадат, но от дадено разстояние нататък все повече се различават. Теоретично пресметнатата скорост на движение под въздействие само на светещото вещество постепенно намалява, а скоростта на обектите, характеризирани движението под въздействие на светещото вещество и на тъмната материя, остава почти постоянна. Следователно с отдалечаване от центъра на галактиката отношението на светещото вещество към тъмното вещество намалява – количеството на тъмното вещество започва да преобладава все повече в сравнение със светещото вещество.



1 крс = 3.26×10^3 светлинни години

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За измервания върху графиката и определяне на скоростите – 2 т.

Забележка: Тъй като в крайната формула фигурира само отношението на скоростите, тяхното определяне в км/сек. фактически не е необходимо и може да се работи с отношението на скоростите в милиметри, измерени върху графиката. Ако някои участници в олимпиадата са постъпили така, то решението им е правилно и не следва да им се отнемат точки. В условието на задачата не се иска изрично да се определят скоростите в км/сек.

За правилна теоретична постановка на решението за отношението на светещото към тъмното вещество и извеждане на формули – 5 т.

За правилен числен резултат – 1 т.

За описание как се изменя съотношението на светещото към тъмното вещество с разстоянието до центъра на галактиката – 4 т.